

EXAMEN ANÁLISIS .1 MATEMÁTICAS II 17/04/2015

1º) Dada la función $f(x) = 2 - x^2 \cdot e^{-x}$

- a) Halla los máximos y mínimos relativos. (1p)
- b) Calcula las asíntotas, si existen. (1p)

2º) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle (1p). Comprueba que la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tiene al menos una solución.(1p)

3º) Define el concepto de función continua en un punto(0.25p).

Determina los valores de a, b, c para que la función:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pase por el punto $A=(2,8)$, tenga un mínimo

relativo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la recta tangente a dicha función en $x=1$ tenga pendiente 4 (1.5p). Calcula también la recta normal a $f(x)$ en $x=1$. (0.25p)

4º) Calcular los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$ (1p)

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$ (1p)

5º) Enuncia el Teorema de Lagrange (0.5p). Estudia la continuidad y la derivabilidad de:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.5p)$$

①

$$1^o) f(x) = 2 - x^2 \cdot e^{-x}$$

$$a) f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 - [2x e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)] = 0 \Leftrightarrow -2x e^{-x} + x^2 e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot (-2x + x^2) = 0 \rightarrow -2x + x^2 = 0 \begin{cases} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow x=2 \end{cases}$$

$$f''(x) = (-2x e^{-x} + x^2 e^{-x})' = -2e^{-x} + 2x e^{-x} + 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} (-2 + 4x - x^2)$$

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{En } x=0 \text{ hay m\u00e1ximo.}$$

$$f''(2) = e^{-2} \cdot 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x=2 \text{ hay m\u00ednimo.}$$

$$b) \text{ A.V. } x=a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (2 - x^2 e^{-x}) = \pm \infty \text{ No existe.}$$

$$\text{A.O. } y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{x^2}{e^x} \right) = 2 - \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Calculamos } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

No hay oblicuas.

2^o) Comprobamos que $\sec x = x^2 - 1$ tiene al menos una soluci\u00f3n: Sea $f(x) = \sec x - x^2 + 1$, que es continua en $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 1 \quad \text{Aplicando el teorema de Bolzano a } f(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0 \quad \text{en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: \text{ existe } c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) / f(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{existe } c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \sec c - c^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sec c = c^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{existe } c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ soluci\u00f3n de la ecuaci\u00f3n } \sec x = x^2 - 1.$$

(2)

$$3) f(x) = ax^3 + bx + c \text{ pasa por } \Delta = (2, 8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c = 8 \Rightarrow \boxed{8a + 2b + c = 8}$$

$$\text{Mínimo en } x = \frac{\sqrt{3}}{3} : f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b = 0 \Rightarrow 3a \cdot \frac{3}{9} + b = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

$$\text{Recta tangente en } x = 1 \text{ tiene pendiente } 4 \Leftrightarrow f'(1) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \boxed{3a + b = 4}$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} 6a + b = 4 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = -2 \end{matrix}} \Rightarrow 8 - 4 + c = 8 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

$$\text{Recta normal: La recta tangente es } y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow \text{La recta normal es } \underline{y - 3 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1)}$$

$$4^a) a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \text{ L'H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 16x + 7}{2x - 1} = \boxed{-7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^\infty \Rightarrow \text{L'H: } e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1 \right) \right]}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1}{\cos x}} = \frac{0}{0} \text{ L'H} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2}{\pi} - \sec x}{-\sec x}} = e^{\frac{\frac{2}{\pi} - 1}{-1}} = \boxed{e^{\frac{2 - \pi}{-\pi}}}$$

(3)

$$5^o) f(x) = \begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$ $f(x)$ es continua y derivable por ser suma y cociente de derivables y $x-1 \neq 0$ si $x \leq 0$.

Para $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + p) = 1+p \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{k+x}{x-1} \right) = \frac{k}{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{1+p = -k} \text{ para que sea continua en } x=0$$

$$f(0) = \frac{k}{-1}$$

$$\text{Para } x \neq 0: f'(x) = \begin{cases} \frac{-1-k}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{-1-k}{1} = -1-k \\ f'(0^+) &= e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{-1-k = 1} \text{ para que sea derivable en } x=0.$$

$$\text{Resolvemos: } \begin{cases} 1+p = -k \\ -1-k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ k = -2 \end{cases}$$

Luego si $p=1$ y $k=-2$ $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$. $\Rightarrow$ Si $k=-2$ y $p=1 \rightarrow f(x)$ es continua y derivable.

$\nwarrow$ Si $k \neq -2$ o $p \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.