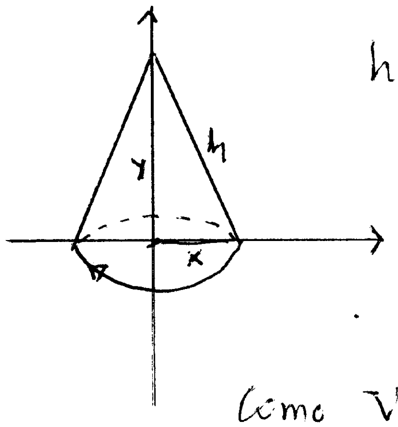
1º)



$h = 90$ cm Por el teorema de Pitágoras:

$h^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 90^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{8100 - x^2}$ ó $x = \sqrt{8100 - y^2}$

Como $V(x,y) = \pi \cdot x^2 \cdot y = \pi \cdot (8100 - y^2)\, y = 8100\pi y - \pi \cdot y^3$

$\Rightarrow V(y) = 8100\pi y - \pi y^3 \Rightarrow V'(y) = 8100\pi - 3\pi y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{8100\pi}{3\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 2700 \Rightarrow y = \sqrt{2700}$. (raiz positiva pues son distancias)

$V''(y) = -6y \Rightarrow V''(\sqrt{2700}) < 0 \Rightarrow$ En $y = \sqrt{2700}$ se alcanza el máximo $\Rightarrow V_{máximo} = \pi \cdot (8100 - 2700) \cdot \sqrt{2700} =$

$x^2 = 8100 - y^2 = 8100 - 2700 = 5400$

$V_{máximo} = \pi \cdot 5400 \cdot \sqrt{2700} = \pi \cdot 5400 \cdot 30\sqrt{3} = \underline{162000\pi \cdot \sqrt{3}}$

2º) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = e^{x+1}$ se cortan en un punto si la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución. $\Longleftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ tiene solución.

Consideramos $H(x) = f(x) - g(x)$. $H(x) = x^2 + 2x - 3 - e^{x+1}$

$H(-3) = -e^{-2} < 0$
$H(-4) = 5 - e^{-3} > 0$

Si aplicamos el teorema de Bolzano a $H(x)$ en el intervalo $[-4,-3] \Rightarrow$ existe $c \in (-4,-3)$ donde $H(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = g(c) \Longleftrightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $c = -3'\ldots$

3º) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ cx+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para $x \neq 2$ $f(x)$ es continua y derivable por ser polinomios.

Para que sea continua en $x=2$:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \iff 2c+1 = 4+2a+b \iff$$

$$\iff 2a+b-2c = 3 \quad (*)$$

$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ c & \text{si } x>2 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x=2$:

$$f'(2)^+ = f'(2)^- \iff 4+a = c \quad (**)$$

Como en $x=1$ tiene un extremo relativo: $f'(1) = 0 \iff$

$2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$. Sustituyo en $(*)$: $\boxed{c=2}$

y sustituyendo en $(*)$: $-4+b-4=1 \Rightarrow \boxed{b=5}$

4º) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2xe^x-(x^2-3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(2x-x^2+3)}{e^{2x}} \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{e^x} \Rightarrow f'(x)=0 \iff -x^2+2x+3=0 \iff x=3,\ x=-1$

signo $f'(x)$:

$-\infty$		-1		3		∞
	$f'(-2) = -$		$f'(0) = +$		$f'(4) = -$	
	decrece		crece		decrece	

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ En $x=-1$ hay un mínimo relativo y en $x=3$ hay un máximo relativo.

$f''(x) = \dfrac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x+3)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(x^2-4x-1)}{e^{2x}} = \dfrac{x^2-4x-1}{e^{2x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=0 \iff x^2-4x-1=0 \iff x=2+\sqrt{5},\ x=2-\sqrt{5}$

dos puntos son P.I.

Signo $f''(x)$:

$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		∞
	$+$		$-$		$+$	

5º

a) $L=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x-\frac{3}{2}\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hopital}} L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cos 3x}{1-\frac{3}{2}\cos x} = \dfrac{3}{-1/2} = \underline{\underline{-6}}$

b) $L=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hop.}} L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x}{2x} = \dfrac{0}{0}$

Aplicamos de nuevo L'Hôpital: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 4\cos 2x}{2} = \dfrac{2-4}{2} = \underline{\underline{-1}}$

c) $L=\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{5x+3} = 1^{\infty} \Longleftrightarrow L = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(5x+3)\cdot\left(\frac{3x+2}{3x+1}-1\right)}$

Calculamos $\lim\limits_{x\to\infty} (5x+3)\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} (5x+3)\cdot\left(\dfrac{3x+2-(3x+1)}{3x+1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (5x+3)\cdot\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+3}{3x+1} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow L = \underline{\underline{e^{5/3}}}$

d) $L=\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty \Rightarrow L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} \Rightarrow$

$L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \dfrac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Aplicamos L'Hôpital de nuevo: $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1/x^2}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1/x^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \underline{\underline{\dfrac{-1}{2}}}$