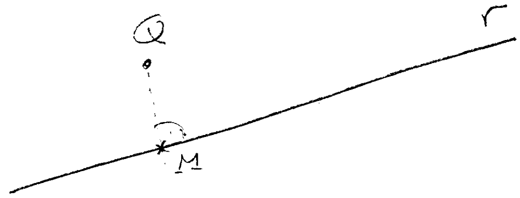
1 a) $r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad Q(3,0,1)$.



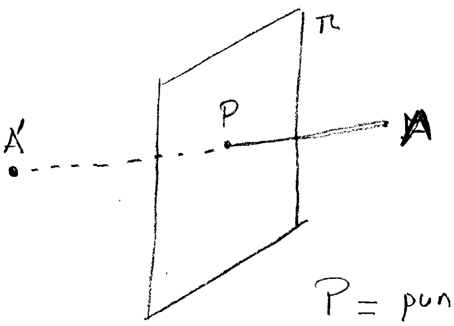
El punto más cercano será el punto M, intersección de la recta "r" con la perpendicular a ella por Q, que además la corta

$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M = (1-\lambda, \lambda, 0)$. Como $\vec{QM} \perp \vec{d_r} \Rightarrow \vec{QM} \cdot \vec{d_r} = 0$

$\Rightarrow (-\lambda-2, \lambda, -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow \boxed{M(2,-1,0)}$

b) $\pi \equiv \begin{cases} \text{Pasa por } Q(3,0,1) \\ \text{Contiene "r"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(3,0,1) \\ \vec{d_r}(-1,1,0) \\ \vec{QP} \text{ donde } P \in r \Rightarrow P = (1 0 0) \Rightarrow \vec{QP} = (-2,0,-1) \end{cases}$

$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-3) - (y) + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{-x - y + 2z + 1 = 0} \equiv \pi$



Busco la recta $s \perp \pi$ que pasa por $A(0,1,1)$

$\vec{d_s} = \vec{n_\pi} = (-1,-1,2)$

$s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$

P = punto de corte de s con π: Sustituyo en π.

$-(-\lambda) - (+1-\lambda) + 2\cdot(1+2\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda + \lambda + 4\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow 6\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ es el punto medio de A y A' buscado: $P = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow A' = 2P - A \Rightarrow$

$\Rightarrow A' = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) - (0,1,1) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)}}$

2 a $\pi \equiv x - 2y + z + 2 = 0$ $\qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

Posición relativa: $\vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$ $\quad \vec{d_r} = (a, 1, -1)$.

$$\frac{1}{a} = \frac{-2}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{cómo } \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \quad \vec{n}_\pi \nparallel \vec{d_r}$$

Sustituyo un punto genérico de r en π:

$$(1 + a\lambda) - 2(\lambda) + (1 - \lambda) + 2 = 0$$

$$1 + a\lambda - 2\lambda + 1 - \lambda + 2 = 0$$

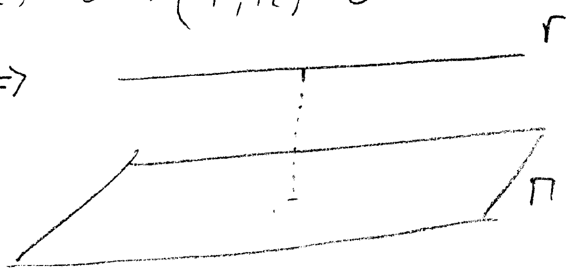
$$(a-3)\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (a-3)\lambda = -4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Si $a = +3 \Rightarrow 0\lambda = -4$ imposible $\Rightarrow r \parallel \pi$.

Si $a \neq 3 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-4}{a-3}$ una solución $\Rightarrow$ r y π se cortan en un punto.

b Si $a \neq 3 \Rightarrow \text{dist}(r, \pi) = 0$

Si $a = 3 \Rightarrow$



$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P_r, \pi)$

$$\pi \equiv x - 2y + z + 2 = 0$$

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ $\qquad P_r = (1\ 0\ 1)$

$$\text{dist}(P_r, \pi) = \left| \frac{1 - 2 \cdot 0 + 1 + 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \underline{\frac{2\sqrt{6}}{3} u}$$

③ ⓐ $r \equiv \begin{cases} x = m + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ $\quad s \equiv \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{-y+2}{-3} = \dfrac{z}{1} \iff \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$

$\vec{d_r} = (2,-1,1) \quad \vec{d_s} = (-1,3,1) \implies$ no son paralelas.

$P = (m,1,-1) \in r \,,\quad Q = (-1,2,0) \in s \implies \vec{PQ} = (-1-m, 1, 1)$

$\{\vec{PQ}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\} = \begin{vmatrix} -1-m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4m - 3 + 5 = 4m + 6 = 0 \iff$

$\iff m = -\frac{3}{2} \implies$ si $m \neq -\frac{3}{2} \implies |\cdot\cdot| \neq 0 \implies$ Se cruzan.

si $m = -\frac{3}{2} \implies |\cdot\cdot| = 0 \implies$ Se cortan (vimos que no eran paralelas)

ⓑ Se cortan si $m = -\frac{3}{2} \implies r \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = -1 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \implies$

$\implies \left.\begin{aligned} -\tfrac{3}{2} + 2\lambda &= -1 - \mu \\ 1 - \lambda &= 2 + 3\mu \\ -1 + \lambda &= \mu \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= \tfrac{1}{2} \\ \lambda + 3\mu &= -1 \\ \lambda - \mu &= 1 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies r \cap s$ es

el punto $\underline{P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$

4° ⓐ $A = (1,0,1)\,,\ B = (0,0,4)\,,\ C = (3,1,1) \implies \begin{aligned} \vec{AB} &= (-1,0,3) \\ \vec{AC} &= (2,1,0) \end{aligned}$

Área triángulo $\overset{\triangle}{ABC} = \dfrac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-1)^2} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{46}\ u^2}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 6, -1)$

(b) $D = (1-\lambda, \lambda, 0) \Rightarrow \vec{AD} = (-\lambda, \lambda, -1)$

Si $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\} = 0$ son coplanarios: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6\lambda + 3\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\} = 1 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{-1}{9}}} \Rightarrow$ Si $\lambda \neq -\frac{1}{9}$ los

cuatro puntos A, B, C y D <u>NO</u> son coplanarios.

Si $\lambda = 2 \Rightarrow \{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\} = 19 \Rightarrow$ Volumen $= \underline{\underline{\frac{19}{6}\ u^3}}$

(c) La recta "s" pedida está contenida en π_{ABC}:

$$\pi_{ABC}: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x-1) + 6y - (z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \pi: -3x + 6y - z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{d_s} \perp \vec{n_\pi}$.

Como "s" pedida $\perp$ r_{AB}: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{d_s} \perp \vec{d_{r_{AB}}}$. En consecuencia:

$$\vec{d_s} = \vec{d_{r_{AB}}} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (-18, -10, -6) \parallel (9, 5, 3)$$

$\Rightarrow$ La recta "s" pedida es $\boxed{\frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{3}}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -a \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -a & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = a^2 - 3a = 0 \iff a = 0$ y $a = 3$

- Si $a \neq 0, 3 \Rightarrow rg\, A = 3 = rg\, A^* \Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ Se cortan en un punto.
- Si $a = 0 \Rightarrow rg\, A = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y $rg\, A^* = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, A^* = 3 \Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ como ninguna fila es proporcional a ninguna de las otras $\Rightarrow$ Se cortan ~~2~~ a dos.

- Si $a = 3 \Rightarrow rg\, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2$ y $rg\, A^* = rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$\Rightarrow rg\, A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-7} & \cancel{-3} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{SCI}}$

$\left.\begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix}\right\}$

y como nº incognitas $- rg\, A = 1 \Rightarrow$ 1 grado de libertad

$\Rightarrow$ se cortan en una recta.